Ein Darstellungssatz für Ultrafilter

Kowalsky, Hans-Joachim

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 49, 1998,
S.155-158

J. Cramer Verlag, Braunschweig

Ein Darstellungssatz für Ultrafilter

Von **Hans-Joachim Kowalsky**, Braunschweig*

(Eingegangen am 11.10.1998)

Nachstehend wird von folgenden Voraussetzungen und Bezeichnungsfestsetzungen ausgegangen.

Es sei X eine feste unendliche Grundmenge der Kardinalität $|X| = \omega_\alpha$. Dabei wird die Kardinalzahl ω_α als spezielle Ordinalzahl aufgefaßt, nämlich als Anfangszahl der entsprechenden Mächtigkeitsklasse. Weiter sei $\mathfrak{w}$ ein freier Ultrafilter von X der Kardinalität ω_α (d.h. $|W| = \omega_\alpha$ für alle $W \varepsilon \mathfrak{w}$). Schließlich sei $\varphi : X \to X$ eine Abbildung, deren Bild die transfinite Kardinalität $|\varphi X| = \omega_\beta$ besitzt, wobei dann $\beta \leq \alpha$ sein muß.

Wegen $|\varphi X| = \omega_\beta$ gibt es ein Bijektion $\varphi': \varphi X \to \omega_\beta$, und $\psi = \varphi' \circ \varphi$ ist eine Surjektion $\psi : X \to \omega_\beta$. Die Ultrafilter $\mathfrak{v}_o = \varphi\mathfrak{w}$ von X und $\mathfrak{v} = \psi\mathfrak{w}$ von ω_β sind dann in dem Sinn äquivalent, daß sie wegen $\mathfrak{v} = \varphi' \mathfrak{v}_o$ bijektiv auf einander abbildbar sind.

Die Urbilder $X_\iota = \psi^-(\iota)$ von Ordinalzahlen $\iota < \omega_\beta$ bilden eine Zerlegung $\{X_\iota : \iota < \omega_\beta\}$ von X in nicht leere, paarweise disjunkte Teilmengen. Und umgekehrt wird durch diese Zerlegung (einschließlich ihrer Wohlordnung) auch die Abbildung ψ eindeutig bestimmt.

Ziel dieser Untersuchung ist der Beweis des folgenden Satzes.

Satz 1 *Zu jedem* $\iota < \omega_\beta$ *gibt es einen Ultrafilter* $\mathfrak{u}_\iota$ *von* X mit $X_\iota \varepsilon \mathfrak{u}_\iota$, *so daß* $\mathfrak{w}$ *die Darstellung*

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{V \varepsilon \mathfrak{v}} \bigvee_{\iota \varepsilon V} \mathfrak{u}_\iota$$

besitzt.

Dabei besteht in dieser Darstellung die rechte Seite genau aus den Mengen der Form $\bigcup_{\iota \varepsilon V} U_\iota$ mit $V \varepsilon \mathfrak{v}$ und $U_\iota \varepsilon \mathfrak{u}_\iota$.

* Prof. em. Dr. H.-J. Kowalsky · Am Schiefen Berg 20 · D-38302 Wolfenbüttel

Dem Beweis dieses Satzes sollen jetzt jedoch zunächst einige erläuternde Bemerkungen vorausgeschickt werden.

Darstellungen der in Satz 1 angegebenen Art traten zum Beispiel schon in der Arbeit „Stufenfunktion für Ultrafilter“ (Abh. BWG XLVII, 1996), kurz (SfU), bei der Definition der Stufenfunktion auf. Allerdings handelte es sich dabei stets um den Spezialfall, daß der jeweilige Ultrafilter $\mathfrak{v}$ ein einfacher Ultrafilter war. Dennoch läßt sich mit Hilfe des Stufenbegriffs und bei Verwendung des in (SfU) bewiesenen Additionssatzes der obige Satz 1 folgern. Nur gewinnt man auf diesem Weg lediglich eine reine Existenzaussage. Hier hingegen soll es sich in dem Sinn um einen konstruktiven Beweis handeln, daß zu einem gegebenen Ultrafilter $\mathfrak{w}$ bei ebenfalls gegebener Abbildung φ bzw. ψ ein Verfahen zur Bestimmung von Ultrafiltern $\mathfrak{u}_\iota$ angegeben wird.

Erschwert wird dies allerdings dadurch, daß die Ultrafilter $\mathfrak{u}_\iota$ duch $\mathfrak{w}$ und zum Beispiel ψ keineswegs eindeutig bestimmt sind: Mann kann sie nämlich für Indizes ι außerhalb einer Menge $V \varepsilon \mathfrak{v}$ unter Wahrung der Forderung $X_\iota \varepsilon \mathfrak{u}_\iota$ noch beliebig abändern, ohne die in Satz 1 angegebene Darstellung von $\mathfrak{w}$ zu beeinflussen. In (SfU, Satz 1.2) wurde jedoch gezeigt, daß dies im Fall einfacher Ultrafilter $\mathfrak{v}$ auch im wesentlichen die einzige Variationsmöglichkeit ist. Wegen der Bedeutung dieses Ergebnisses für die Einschätzung der Situation soll daher zunächst der entsprechende Satz für die hier vorliegenden Gegebenheiten bewiesen werden. Dabei werden wieder die eingangs festgelegten Bezeichnungen benutzt.

Satz 2 *Es sei*

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{V \varepsilon \mathfrak{v}} \bigvee_{\iota \varepsilon V} \mathfrak{u}_\iota = \bigwedge_{V \varepsilon \mathfrak{v}} \bigvee_{\iota \varepsilon V} \mathfrak{u}^*_\iota$$

mit Ultrafiltern $\mathfrak{u}_\iota$, $\mathfrak{u}^*_\iota$ *von* X *und mit* $X_\iota \varepsilon \mathfrak{u}_\iota$, $X_\iota \varepsilon \mathfrak{u}^*_\iota$ *für alle* $\iota < \omega_\beta$. *Dann gibt es eine Filtermenge* $V_o \varepsilon \mathfrak{v}$ *mit* $\mathfrak{u}_\iota = \mathfrak{u}^*_\iota$ *für alle* $\iota \varepsilon V_{o.}$

Beweis: $M = \{\iota : \mathfrak{u}_\iota = \mathfrak{u}^*_\iota\}$ ist eine Teilmenge von ω_β. Da $\mathfrak{v}$ ein Ultrafilter von ω_β ist, gilt $M \varepsilon \mathfrak{v}$ oder anderfalls $M' = \omega_\beta \backslash M \varepsilon \mathfrak{v}$. Im ersten Fall ist die Behauptung mit $V_o = M$ erfüllt. Es muß also nur noch der zweite Fall "$M' \varepsilon \mathfrak{v}$" widerlegt werden. Bei ihm gilt $\mathfrak{u}_\iota \neq \mathfrak{u}^*_\iota$ für alle $\iota \varepsilon M'$ und nach Voraussetzung $X_\iota \varepsilon \mathfrak{u}_\iota$, $X_\iota \varepsilon \mathfrak{u}^*_\iota$. Wegen $\mathfrak{u}_\iota \neq \mathfrak{u}^*_\iota$ gibt es Mengen $U_\iota \varepsilon \mathfrak{u}_\iota$, $U^*_\iota \varepsilon \mathfrak{u}^*_\iota$ mit $U_\iota \subset X_\iota$, $U^*_\iota \subset X_\iota$ und mit $U_\iota \cap U^*_\iota = \emptyset$, weil $\mathfrak{u}_\iota$, $\mathfrak{u}^*_\iota$ Ultrafilter sind. Wegen der im Satz vorausgesetzten Darstellungen von $\mathfrak{w}$ sind $W = \bigcup_{\iota \varepsilon M'} U_\iota$ und $W^* = \bigcup_{\iota \varepsilon M'} U^*_\iota$ Mengen aus $\mathfrak{w}$. Anderseits gilt wegen der Disjunktheit der Mengen X_ι aber $W \cap W^* = \emptyset$, was der Ultrafiltereigenschaft von $\mathfrak{w}$ und damit $\mathfrak{w} \neq \mathfrak{o}$ widerspricht. (Es ist $\mathfrak{o}$ der Nullfilter mit $\emptyset \varepsilon \mathfrak{o}$.)

Der soeben bewiesene Satz macht verständlich, daß in dem folgenden Beweis von Satz 1 bei der Bestimmung der Ultrafilter $\mathfrak{u}_\iota$ erhebliche Spielräume und daher recht willkürliche Wahlmöglichkeiten bestehen. Anderseits besagt Satz 2 aber auch, daß trotz solcher Willkür die Ultrafilter $\mathfrak{u}_\iota$ für Indizes aus einer geeigneten Filtermenge $V_o \varepsilon \mathfrak{v}$ noch weitgehend festgelegt sind.

Beweis von Satz 1

Da $\mathfrak{w}$ ein Ultrafilter der Kardinalität ω_α ist, besitzt jede Filterbasis von $\mathfrak{w}$ die Mächtigkeit $\omega_{\alpha+1}$. Es sei nun $\{W_\nu : \nu < \omega_{\alpha+1}\}$ eine fest gewählte Filterbasis von $\mathfrak{w}$, bei der außerdem noch $W_o = X$ vorausgesetzt sei. Im ersten Beweisschritt werden nun für alle $\nu < \omega_{\alpha+1}$ und für alle $\iota < \omega_\beta$ Ultrafilter $\mathfrak{u}_{\nu,\iota}$ von X definiert, für die außerdem $X_\iota \varepsilon \mathfrak{u}_{\nu,\iota}$ erfüllt ist. Die Definition erfolgt duch Induktion über ν. Dabei werden bei festem ν hinsichtlich ι zwei Fälle unterschieden.

Fall 1: $$W_\nu \cap X_\iota \neq \emptyset.$$

In diesem Fall sei $x_{\nu,\iota} \ \varepsilon W_\nu \cap X_\iota$ beliebig, aber fest gewählt, und es sei dann $\mathfrak{u}_{\nu,\iota} = \widehat{x_{\nu,\iota}}$ der von $x_{\nu,\iota}$ erzeugte Hauptfilter, der aus allen Teilmengen M von X mit $x_{\nu,\iota} \varepsilon M$ besteht.
Wegen $W_o = X$ tritt für $\nu = 0$ dieser Fall für alle ι ein, so daß der Induktionsbeginn gesichert ist.

Fall 2: $$W_\nu \cap X_\iota = \emptyset.$$

Dieser Fall kann nach der vorangehenden Bemerkung nur für $\nu > 0$ eintreten.

Gilt $\nu = \mu+1$, so sei $\mathfrak{u}_{\nu,\iota} = \mathfrak{u}_{\mu,\iota}$.

Ist ν jedoch eine Limeszahl, so sei $\mathfrak{p}$ ein beliebiger, aber fest gewählter Ultrafilter von $\nu = \{\mu : \mu < \nu\}$ mit $\sup\{P : P \varepsilon \mathfrak{p}\} = \nu$. Mit ihm sei dann weiter

$$(*) \qquad \mathfrak{u}_{\nu,\iota} = \bigwedge_{P \varepsilon \mathfrak{p}} \ \bigvee_{\mu \varepsilon P} \mathfrak{u}_{\mu,\iota}.$$

Damit sind die Filter $\mathfrak{u}_{\nu,\iota}$ durch Induktion allgemein definiert. Sie sind auch Ultrafilter, weil sie entweder als einpunktige Hauptfilter gebundene Ultrafilter sind oder weil in (*) aus Ultrafiltern wieder Ultrafilter entstehen. Und schließlich folgt aus der Konstruktion auch unmittelbar $X_\iota \varepsilon \mathfrak{u}_{\nu,\iota}$.

Im nächsten Beweisschritt werden nun die im Satz auftretenden Ultrafilter $\mathfrak{u}_\iota$ für $\iota < \omega_\beta$ konstruiert.

Für jede Filtermenge $W \varepsilon \mathfrak{w}$ sei

$$A_W = \{\nu : W_\nu \subset W\}.$$

Dann ist $A_W \neq \emptyset$ und Teilmenge von $\omega_{\alpha+1}$. Für $W, W' \varepsilon \mathfrak{w}$ gilt

$$\begin{aligned} A_W \cap A_{W'} &= \{\nu : W_\nu \subset W \textit{ und } W_\nu \subset W'\} \\ &= \{\nu : W_\nu \subset W \cap W'\} = A_{W \cap W'}. \end{aligned}$$

Daher ist $\{A_W : W\varepsilon\mathfrak{w}\}$ Basis eines Filters $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ von $\omega_{\alpha+1}$. Es sei nun $\mathfrak{q}$ ein beliebig, aber fest gewählter Ultrafilter von $\omega_{\alpha+1}$ mit $\mathfrak{q} \leq \mathfrak{a}$ (also $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{q}$). Mit ihm wird nun für alle $\iota < \omega_\beta$ durch

$$\mathfrak{u}_\iota = \bigwedge_{Q\varepsilon\mathfrak{q}} \bigvee_{\nu\varepsilon Q} \mathfrak{u}_{\nu,\iota}$$

ein Ultrafilter von X definiert. Wegen $X_\iota\varepsilon\mathfrak{u}_{\nu,\iota}$ für alle $\nu < \omega_{\alpha+1}$ folgt außerdem $X_\iota\varepsilon\mathfrak{u}_\iota$.

Mit den so gewonnen Ultrafiltern u_ι sei schließlich

$$\mathfrak{w}^* = \bigwedge_{V\varepsilon\mathfrak{v}} \bigvee_{\iota\varepsilon V} \mathfrak{u}_\iota .$$

Dann ist im letzten Beweisschritt $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}^*$ nachzuweisen. Dies ist aber gleichwertig mit $\mathfrak{w}\wedge\mathfrak{w}^* \neq \mathfrak{o}$: Denn weil $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{w}^*$ Ultrafilter sind, folgt aus $\mathfrak{w}\wedge\mathfrak{w}^* \neq \mathfrak{o}$ bereits $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}^*$. Daher ist nur noch die Annahme

$$\mathfrak{w}\wedge\mathfrak{w}^* = \mathfrak{w}\wedge \bigwedge_{V\varepsilon\mathfrak{v}} \bigvee_{\iota\varepsilon V} \mathfrak{u}_\iota = \mathfrak{o}$$

zu widerlegen, die ihrerseits gleichwertig ist mit

(**) Es gibt ein $W\varepsilon\mathfrak{w}$ und ein $V\varepsilon\mathfrak{v}$ sowie zu jedem $\iota\varepsilon V$ eine Menge $U_\iota\varepsilon u_\iota$ mit

$$w \cap \bigcup_{\iota\varepsilon V} u_\iota = \emptyset \quad .$$

Für $\iota\varepsilon V$ hat dabei U_ι die Form $U_\iota = \bigcup_{\mu\varepsilon Q_\iota} U_{\mu,\iota}$ mit einem $Q_\iota\varepsilon\mathfrak{q}$ und mit $U_{\mu,\iota}\,\varepsilon u_{\mu,\iota}$.

Wegen $\mathfrak{v} = \psi\mathfrak{w}$ gilt $V = \psi W'$ mit einem $W'\varepsilon\mathfrak{w}$. Und da $\{W_\nu = \nu < \omega_{\alpha+1}\}$ eine Filterbasis von $\mathfrak{w}$ ist, gibt es ein $\lambda < \omega_{\alpha+1}$ mit $W_\lambda \subset W \cap W'$. Bei festem $\iota\varepsilon\psi W_\lambda \subset \psi W' = V$ gilt $Q_\iota \cap A_{W_\lambda} \neq \emptyset$ wegen $\mathfrak{q} \leq \mathfrak{a}$. Es gibt daher ein $\mu\varepsilon Q_\iota \cap A_{W_\lambda}$, und aus der Definition der Mengen A_W folgt $W_\mu \subset W_\lambda$. Es sei nun $\kappa\varepsilon\psi W_\mu$. Wegen $W_\mu \subset W_\lambda \subset W'$ gilt dann auch $\kappa\varepsilon\psi W' = V$. Anderseits folgt aus $\kappa\varepsilon\psi W_\mu$ zunächst $W_\mu \cap X_\kappa \neq \emptyset$. Bei der Bestimmung von $\mathfrak{u}_{\mu,\kappa}$ tritt also Fall 1 ein, und es folgt $u_{\mu,\kappa} = \widehat{x_{\mu,\kappa}}$ mit einem $x_{\mu,\kappa}\varepsilon W_\mu \cap X_\kappa \subset W \cap X_\kappa$. Hieraus ergibt sich wegen $\kappa\varepsilon V$ weiter $x_{\mu,\kappa}\varepsilon U_{\mu,\kappa} \subset U_\kappa$ und somit der Widerspruch

$$x_{\mu,\kappa}\varepsilon W \cap \bigcup_{\iota\varepsilon V} U_\iota .$$

zu (**).